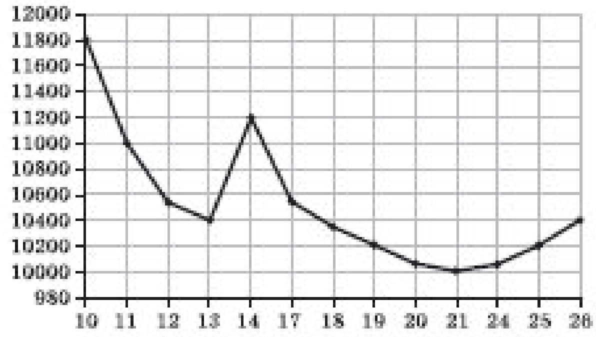
Финансовые задачи
для курса алгебры и начал математического анализа 10—11 классов

Понятие функции.

1. На рисунке жирными точками показана цена никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 10 по 26 ноября 2008 года. По горизонтали указаны числа месяца, по вертикали — цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией.



1) Какой была наибольшая цена никеля на момент закрытия торгов в период с 11 по 21 ноября 2008 г.

2) Какого числа в ноябре 2008 г. цена никеля была самая низкая?

3) Какого числа в ноябре 2008 г. цена никеля была самая высокая?

4) Какой была цена никеля за тонну 13 ноября 2008 г.?

Ответ: 1) 11 200 $; 2) 21 ноября; 3) 10 ноября; 4) 10 400 $.

Комментарии. Полезно обратить внимание на то, что область определения состоит из натуральных чисел от 10 до 26, что не типично для чисто математических графиков курса.

2. На рисунке изображён график изменения курса акций торгово-промышленной группы. По горизонтальной оси указаны числа апреля, а по вертикальной — стоимость одной акции в рублях. Два бизнесмена 7 апреля купили по 50 акций этой группы. Первый бизнесмен продал второму все свои акции по биржевому курсу 17 апреля. Второй бизнесмен продал все имеющиеся у него акции 23 апреля. Пользуясь графиком, ответьте на вопросы.

1) Сколько стоила одна акция 7 апреля?

2) Сколько стоила одна акция 17 апреля?

3) Сколько стоила одна акция 23 апреля?

4) Сколько заплатил каждый бизнесмен за 50 акций торгово-промышленной группы?

5) Какой доход от операций с акциями получил первый бизнесмен?

6) Какой доход от операций с акциями получил второй бизнесмен?

Комментарии. Можно дополнить материалом курса математики, предложив задать данную функцию кусочно.

Квадратичная и дробно-линейная функции. Преобразование графиков

3. Строительство фабрики обошлось в 78 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на фабрике равны $0{,}5x^2 + 2x + 6$ млн рублей в год. Если продукцию фабрики продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль (в млн рублей) за один год окажется равной $px - \left(0{,}5x^2 + 2x + 6\right)$ Фабрика выпускает продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. Какова наименьшая цена p единицы продукции, позволяющая окупить строительство фабрики не более, чем за 3 года?

Решение. В условии задачи не упоминалось о налогах и из выручки px вычитались только затраты на производство. Такая ситуация могла быть только, если фабрика освобождена от налогов на упомянутые 3 года.

Прибыль $px - \left(0{,}5x^2 + 2x + 6\right) = -0{,}5x^2 + \left(p-2\right)x - 6$ будет наибольшей при $x = \dfrac{p-2}{0{,}5\cdot 2} = p-2.$ Equation.3 Чтобы окупить 78 млн рублей за 3 года, прибыль за год должна быть не меньше 26 млн р.:

$$px - \left(0{,}5x^2 + 2x + 6\right) \geq 26,\ \ -0{,}5x^2 + \left(p-2\right)x - 32 \geq 0.$$

При $x = p - 2$ имеем $-0{,}5(p-2)^2 + (p-2)^2 - 32 \geq 0$, $(p-2)^2 \geq 64$, $p \geq 10$.

Ответ: 10 тыс. р. за единицу товара.

Комментарии. Полезно обратить внимание на непринужденность, с которой в решении от функции с аргументом x сделан переход к функции с аргументом p. Это может оказаться важным, если в оформлении решения явно вводить функции.

[10—11 классы, задача на оптимизацию, 10 класс – свойства квадратичной функции, 11 класс – наибольшие и наименьшие значения функции]

4. Два завода выпускают одинаковую продукцию. На первом заводе, если рабочие трудятся суммарно t^2 часов, то они выпускают 5t единиц товара, а на втором заводе за это же суммарное время – $2t$ единиц. За каждый час рабочий и первого, и второго завода получают 200 р. Какая наименьшая сумма понадобится на оплату труда рабочих при выпуске 580 единиц товара?

Решение. Пусть на первом заводе выпустили $5x$ единиц товара, тогда на втором заводе $580 - 5x$ единиц. На первом заводе суммарно проработали x^2 ч, а на втором $\left(0{,}5\left(580-5x\right)\right)^2$ ч.

Найдем наименьшее значение функции $y = x^2 + 0{,}25(580 - 5x)^2$,

$y = \dfrac{29}{4}x^2 - 290\cdot 5x + 290^2$, $y = \dfrac{29}{4}x^2 - 1450x + 290^2$, $x_{\min} = \dfrac{290\cdot 5}{\frac{29}{2}} = 10\cdot 10 = 100$, $y_{\min} = 100^2 + 0{,}25\cdot 80^2 = 11600$ (ч) – это наименьшее число часов, за которое на двух заводах можно выпустить 580 единиц товара.

$200\cdot 11600 = 2\,320\,000$ (р.) – на оплату труда рабочих.

Ответ: 2 320 000 р.

[10—11 классы, задача на оптимизацию, 10 класс – свойства квадратичной функции, 11 класс – наибольшие и наименьшие значения функции]

Функция $y = a^x$.

5. Процент инфляции показывает, на сколько процентов (в среднем) выросли цены.
1) Выразите процент инфляции за x месяцев, если ежемесячная инфляция составляет 3%.
2) Вычислите с помощью калькулятора годовой процент инфляции.

Ответ: 1) $\left(1{,}03^x - 1\right)\cdot 100\%$; 2) $\approx 42{,}6\%$.

[10 класс, **показательная функция**]

6*. Банк А предлагает вклад «Пополняемый» со ставкой 10% годовых. Проценты ежемесячно капитализируются (прибавляются к сумме вклада). Снятие средств и пополнение возможно в любой момент. Максим хочет открыть вклад на сумму 15 000 р. в конце января 2017 г. И затем в конце каждого следующего месяца пополнять его на 15 000 р. Забрать вклад Максим планирует в декабре 2019 г. после последнего начисления процентов (без последнего взноса). Какую сумму получит Максим? Ответ дайте в рублях с округлением до целых чисел.

Если годовой процент по вкладу *n*%, то месячный принято брать равным $\frac{n}{12}$%

Решение. Пусть S_0 начальный вклад A – ежемесячный взнос, m%– годовая ставка, k – срок вклада в месяцах. Через месяц (в конце февраля, первого месяца вклада) накопленная сумма будет равна $S_1 = S_0\left(1+\frac{0{,}01m}{12}\right)+A$. Для простоты обозначим коэффициент $1+\frac{0{,}01m}{12}$ буквой p. В конце второго месяца сумма на вкладе увеличится до

$$S_2 = S_1 p + A = S_0 p^2 + Ap + A,$$
$$S_3 = S_2 p + A = S_0 p^3 + Ap^2 + Ap + A,$$
$$S_4 = S_3 p + A = S_0 p^4 + Ap^3 + Ap^2 + Ap + A,$$

и так далее для всех остальных месяцев. Через k месяцев накопленная сумма составит $S_k = S_{k-1}p + A = S_0 p^k + Ap^{k-1} + Ap^{k-2} + \ldots + Ap = S_0 p^k + A(p^{k-1} + p^{k-2} + \ldots + p)$.

С учетом того, что в данной задаче, видимо, для упрощения $S_0 = A$ получим:

$$A(p^k + p^{k-1} + \ldots + p).$$

Просуммируем геометрическую прогрессию:

$$p^k + p^{k-1} + \ldots + p = \frac{p(p^k - 1)}{p-1}.\quad \text{Наконец, } S_k = A\frac{p(p^k-1)}{p-1}.$$

По условию вклад закрыли через 35 месяцев, т.е. $k = 35$.

$$p = 1 + \frac{0{,}01\cdot 10}{12} = 1 + \frac{1}{120} = \frac{121}{120},$$

$$A\frac{p(p^k-1)}{p-1} = 15000\cdot 121\left(\left(\frac{121}{120}\right)^{35} - 1\right) \approx 611727\ (p).$$

Ответ: 611 727 р.

Комментарии. Понятно, что без инженерного калькулятора выполнять вычисления в этой задаче не надо. Чтобы предлагать такие задачи на ЕГЭ, их условия существенно упрощают и подгоняют числовые данные. Это классическая во всех смыслах задача, такие задачи составляли значительную часть математики в классических гимназиях в дореволюционной России. Раньше вычисления проводили по таблицам и логарифмической линейке. Ради задач на вклады и кредиты в школьный курс математики когда-то была введена геометрическая прогрессия. Задачи с аналогичной математической моделью возникают и при расчёте кредитов.

[10 класс, банковский вклад, показательная функция]

7. 31 декабря Иван Петрович взял в банке кредит на сумму *K* рублей. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет 10% на оставшуюся сумму долга (т.е. увеличивает долг в 1,1 раза), а затем Иван Петрович переводит в банк 2 928 200 р. Сколько рублей взял Иван Петрович в банке, если он выплатил долг четырьмя равными платежами (т.е. за 4 года)?

Решение. Способ 1. По формуле кредита: $K\left(1+0{,}01p\right)^n = A\dfrac{\left(1+0{,}01p\right)^n - 1}{0{,}01p}$, где K р. – сумма кредита, взятого на n лет под p% годовых с ежегодным погашением A рублей.

Формула кредита может быть получена из формулы депозита предыдущей задачи, если в ней ежемесячное пополнение заменить на ежегодную выплату, и расчетный период для упрощения вычислений заменить с месяца на год.

Подставим данные в формулу кредита с равными выплатами, получим

$$K \cdot 1{,}1^n = 2\,928\,200 \cdot \frac{1{,}1^4 - 1}{0{,}1}, \quad K = 2\,928\,2000 \cdot \frac{1{,}1^4 - 1}{1{,}1^4} = 9\,282\,000 \text{ (р.)}.$$

Ответ: 9 282 000 р.

Способ 2. Без формулы кредита.

1) $K \times 1{,}1 - 2\,928\,200$;
2) $K \times 1{,}1^2 - 2\,928\,200 \times 1{,}1 - 2\,928\,200$;
3) $K \times 1{,}1^3 - 2\,928\,200 \times 1{,}1^2 - 2\,928\,200 \times 1{,}1 - 2\,928\,200$;
4) $K \times 1{,}1^4 - 2\,928\,200 \times 1{,}1^3 - 2\,928\,200 \times 1{,}1^2\ 2\,928\,200 \times 1{,}1 - 2\,928\,200 =$
$= K \times 1{,}1^4 - 29\,282\,000(1{,}1^3 + 1{,}1^2 + 1{,}1 + 1) = 0$.

Ответ: 9 282 000 р.

Комментарии. Хотя с формулой решение короче, но, во-первых, ее надо запомнить, во-вторых, условия кредита могут быть иными. Рассмотренные условия относятся к аннуитетному кредиту с постоянной годовой выплатой, но на ЕГЭ встречаются и задачи на кредиты с дифференцированными выплатами. И вообще, могут быть уникальные условия кредита.

[10 класс, банковский кредит, показательные уравнения]

8. Ольга хочет взять кредит 1 200 000 р. Погашение кредита происходит сразу после начисления процентов раз в год равными суммами (кроме, быть может, последней). Ставка кредита 10% годовых. На какое минимальное количество лет Ольга может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 320 000 р.?

Решение. Обозначим искомое число лет буквой n. Тогда должно быть

$$1200\,000 \cdot 1{,}1^n - 320\,000 \cdot \frac{1{,}1^n - 1}{1{,}1 - 1} \le 0;$$

$$1200\,000 \cdot 1{,}1^n \le 3\,200\,000 \cdot 1{,}1^n - 3\,200\,000;$$

$1{,}1^n \le \dfrac{3\,200\,000}{2\,000\,000}$, $1{,}1^n \le 1{,}6$. Equation.3 Поскольку $1{,}1^4 < 1{,}6 < 1{,}1^5$, кредит можно погасить за 5 лет или больше.

Ответ: за 5 лет.

[9—10 классы. Банковский кредит. 9 класс – сумма первых n членов геометрической прогрессии, 10 класс – показательное неравенство.]

9. Колины родители взяли ипотечный кредит K рублей под 10% годовых на 10 лет с условием выплаты его равными суммами (кроме, быть может, последней). Какую сумму ежегодно должна вносить в банк Колина семья?

Решение. $K \cdot 1{,}1^{10} - A(1{,}1^{10-1} + 1{,}1^{10-2} + \ldots + 1{,}1^{10-9} + 1) = 0$,

$$K \cdot 1{,}1^{10} - A \cdot \frac{1{,}1^{10} - 1}{0{,}1} = 0, \quad A = K \cdot 1{,}1^{10} \cdot \frac{0{,}1}{1{,}1^{10} - 1}, \; A \approx 0{,}163K$$

Ответ: $A \approx 0{,}163K$ Equation.3

[9—10 классы. Банковский кредит. 9 класс – сумма первых n членов геометрической прогрессии, 10 класс – показательная функция.]

10. 31 декабря 2013 г. Сергей взял в банке 9 930 000 р. в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т.е. увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк определенную сумму ежегодного платежа. Какова должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

Решение. Способ 1. По формуле кредита: $K(1+0{,}01p)^n = A\dfrac{(1+0{,}01p)^n-1}{0{,}01p}$, где K р. – сумма кредита, взятого на n лет под p% годовых с ежегодным погашением A рублей.

$$9\,930\,000 \times 1{,}1^3 - p \times \frac{1{,}1^3-1}{0{,}1} = 0 \text{ Equation.3 }, \quad 993\,000 = p \times \frac{1{,}1^3-1}{1{,}1^3} \text{ Equation.3 },$$

$$p = 993000 : \left(1 - \frac{1}{1{,}1^3}\right) = 3993000 \text{ (р.).}$$

Ответ: 3 993 000 р.

Способ 2. Без формулы кредита, потому что формула выводится в самом решении. Пусть сумма кредита равна a р., ежегодный платеж равен x р., а годовые проценты составляют k%. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $m = 1 + 0{,}01k$. После первой выплаты сумма долга составит: $a_1 = am - x$. После второй выплаты сумма долга составит:

$$a_2 = a_1m - x = (am - x)m - x = am^2 - mx - x = am^2 - (1 + m)x.$$

После третьей выплаты сумма оставшегося долга составит:

$$a_3 = am^3 - (1 + m + m^2)x = am^3 - \frac{m^3-1}{m-1}\cdot x. \textit{ Equation.3}$$

По условию тремя выплатами Сергей должен погасить кредит полностью, поэтому

$$am^3 - \frac{m^3-1}{m-1}\cdot x = 0, \textit{ Equation.3} \text{ откуда } x = \frac{am^3(m-1)}{m^3-1}.$$

При $a = 9\,930\,000$ и $k = 10$, получаем $m = 1{,}1$ и

$$x = \frac{9\,930\,000\cdot 1{,}331\cdot 0{,}1}{0{,}331} = 3\,993\,000 \text{ (р.).}$$

Ответ: 3 993 000 р.

[10 класс. Банковский кредит. Показательная функция. ЕГЭ, профильный уровень, № 16]

Свойства логарифмов

11. Банковский депозит в 10% годовых в конце каждого года пролонгируется (продлевается) на следующий год, а проценты по вкладу не только не снимаются, но вклад пополняется еще на 100 тыс. р. Депозит был закрыт, как только сумма на счете превысила 1,3 млн р. Сколько лет депозит держали в банке, если начальная сумма было 0,5 млн р.?

Решение. Пусть вклад держат в банке n лет. Тогда на нем окажется $0{,}5\cdot 1{,}1^n + 0{,}1\dfrac{1{,}1^n-1}{0{,}1}$. По условию эта сумма должна быть больше 1,3 млн р.

$$0{,}5\cdot 1{,}1^n + 0{,}1\frac{1{,}1^n-1}{0{,}1} > 1{,}3,\ \ 1{,}5\cdot 1{,}1^n > 2{,}3,\ 1{,}1^n > \frac{2{,}3}{1{,}5}, n > \frac{\lg\frac{23}{15}}{\lg 1{,}1} \approx 4{,}5.$$

Ответ: 5 лет.

[10 класс, банковский депозит, логарифмическая функция]

12. Вклад в банке ежегодно увеличивается на 20%. Через сколько лет сумма денег на счете превысит первоначальную не менее, чем вдвое?

Решение. Способ 1 с помощью вычислений.

Через n лет сумма на счете вклада увеличится в $1{,}2^n$ раза. По условию задачи должно быть $1{,}2^n \geq 2.$ Можно последовательно возводить число 1,2 в степени 2, 3, 4 и т.д., пока результат не превзойдет 2:

$1{,}2^2 = 1{,}44$, $1{,}2^3 = 1{,}728$, $1{,}2^4 = 2{,}0736$.

Ответ: через 4 года

Способ 2 с помощью свойств логарифмов.

Через n лет сумма S_n на счете вклада станет равна $S_0 \cdot 1{,}2^n$, где S_0 – первоначальный вклад. Должно быть $S_0 \cdot 1{,}2^n \geq 2S_0;\ 1{,}2^n \geq 2;\ n \geq \dfrac{\lg 2}{\lg 1{,}2} \approx 3{,}8.$

Ответ: через 4 года.

[10 класс, банковские вклады, логарифмы]

13. В микрокредитной организации «Деньги сразу» берется вредит на сумму 50 000 р. на следующих условиях: первого числа каждого месяца сумма долга увеличивается на 10%, до конца месяца заемщик возвращает 10 000 р. В последний месяц выплата может оказаться меньше 10 000 р. На сколько месяцев рассчитан этот кредит и сколько придется выплатить заемщику?

Решение. $\left(\left(\left(50\,000 \cdot 1{,}1 - 10\,000\right)\cdot 1{,}1 - 10\,000\right)\cdot 1{,}1 - 10\,000\right)\ldots =$

$$= 50\,000 \cdot 1{,}1^n - 10\,000 \cdot \frac{1{,}1^n - 1}{0{,}1} \leq 0;$$

$$50\,000 \cdot 1{,}1^n \leq 100\,000 \cdot 1{,}1^n - 100\,000;$$

$$1{,}1^n \geq 2;\ n \geq \frac{\lg 2}{\lg 1{,}1} \approx 7{,}3;\ n = 8.$$

Кредит рассчитан на 8 месяцев. На восьмой месяц останется выплатить

$$50\,000 \cdot 1{,}1^7 - 10\,000 \cdot \frac{1{,}1^7 - 1}{0{,}1} \approx 2600\ (\text{р.}).$$

Всего заемщик, взявший 50 000 р., должен будет выплатить примерно 72 600 р.

Ответ: 8 месяцев, 72 600 р.

[10 класс, микрокредит, логарифмы]

Вероятность и статистика

14. На предприятии работают 100 человек: директор, зарплата которого составляет 1 000 000 р. в месяц, и 99 служащих, каждый из которых получает по 10 000 р. в месяц. Служащие потребовали повысить им зарплату, так как практически все работники предприятия получают всего по 10 000 р. Однако директор отказал им, объяснив, что средняя зарплата на предприятии составляет около 20 000 р. Какая из характеристик: среднее арифметическое, мода или медиана – лучше отражает ситуацию с зарплатой на предприятии?

Ответ: среднее арифметическое равно 19 900 р., мода равна 10 000 р, медиана равна 495 000 р. Лучше соответствует ситуации медиана.

[10—11 классы, зарплата, статистика, средние значения]

15. Страховая компания M предлагает владельцам автомобилей страхование по риску «Ущерб в ДТП». Аналитики компании провели исследование и оценили вероятности попадания автомобиля в ДТП в течение года и средние страховые выплаты для страховых случаев, указанных в таблице.

Страховой случай	Легкий ущерб	Тяжелый ущерб	Полное уничтожение
Вероятность	0,11	0,038	0,002
Средняя выплата	35 000 р.	150 000 р.	650 000 р.

Из-за конкуренции в страховом бизнесе компания *M* хочет установить наименьшую цену страхового полиса, при которой средняя прибыль от продажи одного страхового полиса будет 500 рублей. Найдите эту цену.

Решение. Математическое ожидание страховой выплаты – это сумма произведений выплаты на ее вероятность.

35 000 × 0,11 + 150 000 × 0,038 + 650 000 × 0,002 + 500 =

= 3850 + 5700 + 1300 (р.) + 500 = 11 350 (р.)

Ответ: 11 350 рублей.

[10—11 классы, страхование, статистика, математическое ожидание]

16. Правила лотереи-спринт (где нужно стереть на билетике краску с закрытых областей) опубликованы. Всего выпущено 10 000 билетиков. 25% билетиков имеют выигрыш, равный цене билетика, 500 билетиков несут выигрыш 500 р., 10 билетиков дают выигрыш 1000 р., один билетик дает главный выигрыш – 10 000 р.

а) Найдите минимальную цену билетика (целое число рублей), при которой математическое ожидание дохода устроителя лотереи от продажи одного билетика не менее 10 р.

б) Найдите математическое ожидание выигрыша игрока на один билетик при цене билета, найденной в пункте а).

Решение. а) Пусть искомая цена билетика равна x р. Тогда математическое ожидание выигрыша на один билетик равно корню уравнения

$$0{,}25\times x+0{,}05\times 500+0{,}001\times 1000+0{,}0001\times 10000=x-10,$$

$$37=\frac{3}{4}x,\quad x=\frac{37\times 4}{3}=49\frac{1}{3}.$$

Следовательно, минимальная цена 50 р.

б) При цене билетика 50 р. математическое ожидание выигрыша игрока на один билетик составит $0{,}25\times 50+27=39{,}5$, $27-0{,}75\times 50=-10{,}5$ (р.).

Ответ: а) 50 рублей; б) $-10{,}5$ рублей.

Комментарии. Математическое ожидание выигрыша оказалось отрицательным. В противном случае лотерея была бы убыточна для устроителя.

11 класс

Производная

17. 1) Найдите скорость изменения стоимости *q* (р.) товара при увеличении объема его производства, если стоимость изготовления *x* изделий находится по формуле $q(x)=10+22x+\dfrac{x^2}{1200}$.

2) Какова стоимость изготовления одного изделия в серии из 120 штук?

Решение. Найдём производную функции $q'(x)=\left(10+22x+\dfrac{x^2}{1200}\right)'=22+\dfrac{x}{600}$.

$$\frac{q(120)}{120}=\frac{10+22\cdot 120}{120}+\frac{120^2}{1200\cdot 120}=22+\frac{1}{12}+\frac{1}{10}=22+\frac{22}{120}=22\frac{11}{60}\approx 22{,}18\,(\text{р.}).$$

Ответ: 1) $q'(x)=22+\dfrac{x}{600}$; 2) 22,18 р.

[11 класс, скорость изменения стоимости товара, производная]

18. Стоимость C плавания корабля в зависимости от времени определяется формулой $C(t)=\left(a+bv^3\right)t$, где a и b – постоянные, v – скорость корабля, а t – время движения (первое слагаемое связано с расходом на амортизацию и содержание команды, а второе – с расходом топлива). При какой скорости судно пройдет расстояние s с наименьшими затратами?

Решение. $C=s\left(\dfrac{a}{v}+bv^2\right)$ $C'=s\left(-\dfrac{a}{v^2}+2bv\right)$ $C'=0$ $2bv=\dfrac{a}{v^2}$, $v^3=\dfrac{a}{2b}$, $v=\sqrt[3]{\dfrac{a}{2b}}$.

Ответ: $\sqrt[3]{\dfrac{a}{2b}}$.

[11 класс, экономичная скорость и стоимость плавания корабля, производная, наибольшие и наименьшие значения функции]

Повторение. Числа и числовые выражения

19. Баночка йогурта стоит 14 р. 60 к. Какое наибольшее количество баночек йогурта можно купить на 100 р.?

[Вычисления. ЕГЭ базовый уровень. Демоверсия. ФИПИ]

20. Килограмм моркови стоит 40 р. Олег купил 1 кг 600 г моркови. Сколько рублей сдачи он должен получить со 100 р.?

[Вычисления. ЕГЭ базовый уровень. Демоверсия. ФИПИ]

21. В строительном магазине «А» шурупы продаются упаковками по 110 штук и стоят 240 рублей за упаковку, а в строительном магазине «Б» – упаковками по 100 штук и стоят 198 рублей за упаковку.

1) В каком магазине шурупы стоят дешевле?

2) В каком магазине покупка 105 шурупов обойдется дешевле?

3) Какое количество шурупов дешевле купить в магазине «А»?

Ответ: 1) в магазине «Б»; 2) в магазине «А»; 3) от 101 до 110, от 201 до 220, от 301 до 330 или от 401 до 440.

22. Турист подбирает экскурсии. Сведения об экскурсиях представлены в таблице.

Номер экскурсии	Посещаемый объект	Стоимость экскурсии
1	Крепость, загородный дворец	350 р.
2	Музей живописи	200 р.
3	Парк	150 р.
4	Парк, музей живописи	300 р.
5	Парк, крепость	300 р.
6	загородный дворец	200 р.

Пользуясь таблицей, подберите экскурсии так, чтобы посетить четыре объекта: крепость, загородный дворец, парк и музей живописи, а суммарная стоимость экскурсий не превышала 650 р. В ответе укажите какой-нибудь один набор экскурсий без пробелов и запятых.

[Вычисления. ЕГЭ базовый уровень. Демоверсия]

23. Строительная фирма планирует купить 70 м^3 пеноблоков у одного из трех поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей нужно заплатить за самую дешевую покупку с доставкой?

Поставщик	Стоимость пеноблоков (р. за 1 м^3)	Стоимость доставки (р.)	Дополнительные условия
А	2600	10 000	Нет
Б	2800	8000	При заказе товара на сумму свыше 150 000 р. доставка бесплатная
В	2700	8000	При заказе товара на сумму свыше 200 000 р. доставка бесплатная

[Оптимальный выбор, вычисления, ЕГЭ базовый уровень. Демоверсия. ФИПИ]

24. Для обслуживания международного семинара необходимо собрать группу переводчиков. Сведения о кандидатах представлены в таблице.

Номер переводчика	Язык	Стоимость услуг (руб. в день)
1	Немецкий, испанский	7000
2	Английский, немецкий	6000
3	Английский	3000
4	Английский, французский	6000
5	Французский	2000
6	Испанский	4000

Пользуясь таблицей, соберите хотя бы одну группу, в которой переводчики вместе владеют четырьмя иностранными языками: английским, немецким, французским и испанским, а суммарная стоимость их услуг не превышает 12 000 р. в день.

В ответе укажите какой-нибудь один набор номеров переводчиков без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

[Оптимальный выбор, вычисления, ЕГЭ, базовый уровень. Демоверсия. ФИПИ]

25. Стоимость проезда в пригородном электропоезде составляет 198 р. Школьникам предоставляется скидка 50%. Сколько рублей стоит проезд группы из 4 взрослых и 12 школьников?

Решение. 198 Т 4 + 198 : 2 Т 12 = 792 + 1188 = 1980 (р.). Ответ: 1980 р.

[Простые проценты. ЕГЭ. Базовый уровень. Демоверсия. ФИПИ]

26. Ивану Кузьмичу начислена заработная плата 20 000 р. Из этой суммы вычитается налог на доходы физических лиц в размере 13%. Сколько рублей он получит после уплаты подоходного налога?

[Простые проценты. ЕГЭ. Базовый уровень. Демоверсия. ФИПИ]

Повторение. Уравнения и неравенства

27. На валютной бирже курс доллара США к рублю вначале вырос на 20%, а затем снизился на 20%, за этот же период курс евро к рублю сначала вырос на 10%, а затем снизился на 10%. Выросла или снизилась стоимость доллара США относительно евро за этот период? На сколько процентов?

Решение. Предположим, что x рублей – первоначальная цена доллара США, а y рублей – первоначальная цена евро. Итоговое изменение цены доллара равно $x \cdot 1,2 \cdot 0,8 = 0,96x$ (руб.). Итоговое изменение цены евро равно $y \cdot 1,1 \cdot 0,9 = 0,99y$ (руб.). Первоначальное отношение доллар/евро было $\frac{x}{y}$, а после всех колебаний оно стало $\frac{0,96x}{0,99y} = \frac{32}{33} \cdot \frac{x}{y}$, т.е. доллар снизился относительно евро на 1/33 или примерно на 3%.

Следует иметь в виду, что изменился не курс доллара к евро (о нем не говорится в условии), а именно отношение стоимости одной валюты к другой, стоимости, выраженной для обеих валют в рублях.

Ответ: снизился примерно на 3%.

28. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 6 млн р. на несколько лет. Условия его возврата таковы:

каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На какой минимальный срок следует брать кредит, чтобы наибольший годовой платеж не превысил 1,8 млн р?

Решение. Представим выплаты в виде сумм, первые слагаемые которых погашают начисленные проценты, а вторые равны $\frac{6}{n}$ (млн р.), где n лет – срок кредита. Тогда наибольшей будет первая выплата, равная $6 \cdot 0,2 + \frac{6}{n}$. Следующие выплаты будут уменьшаться вместе с первым слагаемым платежей. По условию

$$6 \cdot 0,2 + \frac{6}{n} \le 1,8,\ 0,6n \ge 6,\ n \ge 10,$$

Ответ: на 10 лет.

Комментарии. Если условие задачи читать невнимательно, то ее легко спутать с задачей на аннуитетный кредит, когда равны ежегодные выплаты.

[10 класс, банковский кредит, неравенства]

29. Для одного из предприятий-монополистов зависимость объёма спроса на продукцию q (единиц в месяц) от её цены p (тыс. р.) задаётся формулой: $q = 210 - 15p$. Определите максимальный уровень цены p (в тыс. р.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = qp$ составит не менее 360 000 р.

Решение.

$$(210 - 15p)p \ge 360,\ -15p^2 + 210p - 360 \ge 0,\ p^2 - 14p + 24 \le 0,\ 2 \le p \le 12.$$

Ответ: 12 000 р.

30. 15 января планируется взять кредит в банке на 6 месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r% по сравнению с концом предыдущего месяца, где r – натуральное число;

со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн р.)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Найдите наибольшее значение r, при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

Решение. По условию, долг перед банком (в млн. р.) на 15-е число каждого месяца должен уменьшаться следующим образом: 1; 0,6; 0,4; 0,3; 0,2; 0,1; 0.

Пусть $k = 1 + 0{,}01r$, тогда долг (в млн. р.) на 1-е число каждого месяца соответственно равен: 1; $0{,}6k$; $0{,}4k$; $0{,}3k$; $0{,}2k$; $0{,}1k$.

Следовательно, выплаты со 2-го по 14-ое число каждого месяца составляют:

$$0;\ k - 0{,}6;\ 0{,}6k - 0{,}4;\ 0{,}4k - 0{,}3;\ 0{,}3k - 0{,}2;\ 0{,}2k - 0{,}1;\ 0{,}1k.$$

Общая сумма выплат составляет:

$$(1 + 0{,}6 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1) - (0{,}6 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1) - 1 + 1 = 2{,}6(k - 1) + 1.$$

По условию общая сумма выплат меньше 1,2 млн р., значит,

$$2{,}6(k - 1) + 1 < 1{,}2;\ 2{,}6\cdot 0{,}01r < 0{,}2;\ r < 7\frac{9}{13}.$$ Equation.3

Наибольшее целое решение этого неравенства – число 7. Значит, искомое число $r = 7$.

Ответ: 7%.

[10 класс. Банковский кредит. Неравенства. ЕГЭ, профильный уровень, № 16]

31. Елена Ивановна взяла в банке кредит на сумму 1,2 млн р. на срок 24 месяца. По договору она должна возвращать банку часть денег в конце каждого месяца. Каждый месяц общая сумма долга возрастает на 2%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Еленой Ивановной банку в конце месяца. Суммы, выплачиваемые Еленой Ивановной, подбираются так, чтобы сумма долга уменьшалась равномерно, т. е. на одну и ту же величину каждый месяц. Какую сумму Елена Ивановна вернет банку в течение первого года кредитования?

Решение. Это дифференцированный кредит. Пусть a_n — размер долга Елены Ивановны на конец месяца n, x_n — ее платеж в конце месяца n, тогда $a_n = 1{,}02a_n - 1 - x_n$. Последовательность a_n является арифметической прогрессией. При этом $a_0 = 1200$ тыс. р., а $a_{24} = 0$, так как в конце срока кредитования долг Елены Ивановны должен быть равен нулю. Этих двух членов прогрессии достаточно, чтобы узнать всю последовательность:

$$a_n = \frac{24 - n}{24}\cdot 1200.$$

Значит, $x_n = 1{,}02a_{n-1} - a_n = \left(1{,}02\cdot\frac{25 - n}{24} - \frac{24 - n}{24}\right)\cdot 1200 = \frac{1{,}5\cdot 0{,}02n}{24}\cdot 1200.$ Equation.3

Так как a_n является арифметической прогрессией, получаем

$S_{12} = \frac{(x_1 + x_{12})\cdot 12}{2} = (50\cdot 1{,}48 + 50\cdot 1{,}26)\cdot 6 =$ Equation.3 $300\cdot(1{,}48 + 1{,}26) = 822$ (тыс. р.).

Ответ: 822 тыс. р.

[9—11 классы, банковский кредит, сумма первых n членов арифметической прогрессии]

32*. В образовательном центре работают 12 преподавателей, 3 руководителя и 5 технических сотрудников. Фонд оплаты труда составляет 900 000 в месяц. Оплата труда сотрудников состоит из базовой и премиальной части. Базовая часть оплаты труда преподавателя 27 000 рублей в месяц. На технических сотрудников приходится 10% фонда оплаты труда. Размер базовой части оплаты труда руководителей (включая директора) устанавливает директор учреждения, она не меньше, чем у других сотрудников учреждения.

Премиальная часть начисляется пропорционально базовой части (но не выплачивается сотруднику в случае серьезных нарушений трудовой дисциплины или невыполнения обязанностей).

Кроме того, оплата труда самого высокооплачиваемого сотрудника учреждения не может превышать среднюю оплату труда более чем в 3 раза.

В каких пределах может быть установлена заработная плата преподавателя учреждения?

Решение. Средняя зарплата в центре 900 000 : (12 + 3 + 5) = 900 000 : 20 = 45 000 (р.). На оплату труда руководителей и преподавателей приходится 90%, то есть

$$900000 \cdot 0{,}9 = 810000 \text{ (р.)}.$$

Пусть x р. – средний размер базовой части оплаты труда руководителей, y – отношение премиальной части к базовой. Тогда

$$\left(y+1\right)\left(3x + 27000 \cdot 12\right) = 810000.$$

Поскольку премиальная часть пропорциональна базовой части у всех сотрудников учреждения, то средний размер базовой части руководителей может быть в пределах

$$27000 \le x \le 45000 \cdot \frac{3}{y+1}.$$

Верхняя граница соответствует случаю, когда суммарная зарплата всех руководителей ровно в 3 раза превышает среднюю оплату труда сотрудников учреждения. Решим уравнение при наименьшем и наибольшем значениях x. При $x = 27000$ получаем:

$$\left(y+1\right) \cdot \left(3 \cdot 27000 + 12 \cdot 27000\right) = 810000, \text{ откуда } y = 1,$$

и в этом случае оплата труда преподавателя $27000 \cdot 2 = 54000$ рублей. При $x = 135000 : \left(y+1\right)$ получаем:

$$\left(y+1\right) \cdot \left(\frac{135000}{y+1} \cdot 3 + 27000 \cdot 12\right) = 810000, \text{ откуда}$$

$$324\left(y+1\right) = 405;\ y = 0{,}25.$$

В этом случае оплата труда преподавателя $27 \cdot 1{,}25 = 33750$ рублей.

Ответ: от 33 750 до 54 000 рублей.

33. Алексей приобрел ценную бумагу за 7000 р. Цена этой ценной бумаги каждый год (по истечении полного года) возрастает на 2000 р. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счет. Каждый год сумма на счете будет увеличиваться на 10%. В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы банковский вклад был для него выгодней, чем ценная бумага?

Решение. Величина банковского процента от стоимости ценной бумаги, равной 7000 + 2000n (р.), где n – количество лет после покупки, должна стать не меньше 2000 р.

$0{,}1\left(7000 + 2000n\right) \ge 2000,\ 2n \ge 13,\ n \ge 6{,}5,$ т.е. $n = 7$.

Ответ: продать ценную бумагу нужно по истечении седьмого года.